Chapitre 14. Produit scalaire, groupe orthogonal

Proposition 0.1. Soit K un corps de caractéristique différent de 2

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors

$$\boxed{X^T AY = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i y_j}$$

$$\boxed{e_i^T A e_j = a_{ij}}$$

En particulier, si pour tout $X, Y \in K^n$, $X^T AY = X^T BY$ alors $A = B$

1 Forme bilinéaire symétrique

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit E un K-ev et $\varphi : E \times E \to K$ une fbs (forme bilinéaire symétrique)
La forme quadratique associée à φ est

$$q : \begin{cases} E \to K \\ x \mapsto q(x) = \varphi(x, x) \end{cases}$$

φ est la forme polaire de q

Proposition 1.2 (Identité de polarisation). Avec ces notations

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} (q(x + y) - q(x) - q(y)) \\ &= \frac{1}{2} (q(x) + q(y) - q(x - y)) \\ &= \frac{1}{4} (q(x + y) - q(x - y)) \end{aligned}}$$

À une forme quadratique ne correspond qu'une unique forme polaire.

1.2 Expression matricielle

Définition 1.3. Soit E un K-ev de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\varphi : E \times E \to K$ fbs et q sa forme quadratique.
On pose $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(q) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(K)$

Proposition 1.4. Avec ces notations, si $x, y \in E$ de colonnes X et Y dans la base $\mathcal{B}$ et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$ on a

$$\boxed{\varphi(x, y) = X^T AY = Y^T AX}$$

Définition 1.5. Soit $A \in S_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid M^T = M\}$
$\varphi_A : (X, Y) \in K \times K \mapsto X^T AY$ est une fbs sur K^n appelée fbs canoniquement associée à A

Proposition 1.6. Soit E K-ev, φ une fbs sur E de dim. finie.
Soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ deux bases et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$, $B = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$, $P = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$
Alors

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Définition 1.7. Soit $A, B \in S_n(K)$
On dit que A et B sont congruentes s'il existe $P \in GL_n(K)$ avec $B = P^T A P$

Définition 1.8. Soit φ une fbs sur E de dim. finie.
Le rang de φ (ou de q sa forme quadratique) est $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,A$ où $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$ avec $\mathcal{B}$ une base de E

1.3 Orthogonalité selon un fbs

Définition 1.9. Soit φ une fbs sur E K-ev
$x, y \in E$ sont dits orthogonaux pour φ si $\varphi(x, y) = 0$. On écrit $x \perp y$ ou $x \perp^{\varphi} y$
On dit que $x \in E$ est isotrope si $x \perp x$ ie. $\varphi(x, x) = 0$
Si $A \subset E$

$$A^{\perp} = A^{\perp(\varphi)} = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \varphi(x, a) = 0\}$$

Le noyau de φ est

$$E^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

On dit que φ est non dégénérée si $E^{\perp} = \{0\}$

Proposition 1.10. Soit φ une fbs sur E de dim. finie et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$ avec $\mathcal{B}$ une base de E
Alors

$$\boxed{\varphi \text{ non dégénérée} \iff A \text{ inversible}}$$

Proposition 1.11. Soit E un K-ev de dim. finie et φ une fbs sur E non dégénérée.
Alors

$$H : \begin{cases} E \to E^* \\ x \mapsto \varphi(x, \cdot) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \varphi(x, \cdot) : \begin{cases} E \to K \\ y \mapsto \varphi(x, y) \end{cases}$$

est un isomorphisme : $\forall l \in E^*$, $\exists! x \in E$, $\forall y : l(y) = \varphi(x, y)$

1.4 Bases orthogonales

Définition 1.12. Soit φ une fbs sur E de dim. finie.
$(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$ base de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$
$\mathcal{B}$ est une base orthogonale $\iff \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) \in D_n(K)$
Dans ces conditions $\mathrm{rg}(\varphi)$ est le nombre de coefficients différents de 0 sur la diagonale.

Théorème 1.13. Soit φ une fbs sur E de dimension finie.
Alors φ possède une base orthogonale.

Lemme 1.14. Si $x \in E$ est non isotrope, alors $E = Kx \oplus (Kx)^{\perp}$

Corollaire 1.15.

1. Soit E un K-ev de dim. finie n, φ une fbs sur E
   Il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ orthogonale de E telle que

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_r x_r y_r \quad \text{où} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2$$

   avec $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K^*$ et $r = \operatorname{rg} \varphi$

2. Si $A \in S_n(K)$ alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & (0) & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in D_n(K)$$

   avec $\lambda_i \in K^*$ et $r = \operatorname{rg} A$

2 Formes positives, produit scalaire

2.1 Matrices positives

Ici E est $\mathbb{R}$-ev

Définition 2.1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$
On dit que A est positive si φ_A est une fbs positive : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ X^T AX \geqslant 0$
On note

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ positive } \}$$

On dit que A est définie positive si φ_A est un produit scalaire : $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ X^T AX > 0$
On note

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ définie positive } \}$$

2.2 Exemples d'espaces préhilbertiens réels

2.2.1 Espaces préhilbertiens fonctionnels

$E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$$

2.2.2 Espace de Legendre

$E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg$$

2.2.3 Espace d'Hermite

$E = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2} \text{ intégrable} \right\}$ muni de

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-x^2} \, dx$$

E contient en particulier les fonctions polynomiales.

Lemme 2.2. Si $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$ alors $fg \in L^1(I, \mathbb{K})$

2.2.4 Espace de Laguerre

$E = \{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } x \mapsto f(x)^2 e^{-x} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}_+ \}$ muni de

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) g(x) e^{-x} \, dx$$

2.3 Théorème de représentation des formes linéaires

Corollaire 2.3. Soit E un espace euclidien.
Tout $l \in E^*$ s'écrit de manière unique

$$l : \begin{cases} x \mapsto \langle e, x \rangle \\ E \to \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $e \in E$

2.4 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Proposition 2.4 (Pythagore)**.** Soit $x, y \in E$
Alors

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Proposition 2.5.

1. $A \subset B \subset C \implies B^\perp \subset A^\perp$
2. $A \subset A^{\perp\perp}$
3. Si $F = \operatorname{Vect} A$ alors $A^\perp = F^\perp$

Proposition 2.6. Si $(E_i)_{i \in I}$ famille de sev de E 2 à 2 $\perp$ alors $\sum\limits_{i \in I} E_i$ est directe, on la note

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in I}} E_i$$

Théorème 2.7. Soit E un espace préhilbertien et F un sev de dimension finie.
Alors :

1. $F \oplus F^\perp = E$
2. $F^{\perp\perp} = F$

On définit la projection orthogonale sur F par $p_F = p_{F, F^\perp}$
Si $(e_1, ..., e_p)$ est une BON de F alors

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i}$$

Proposition 2.8. Si E est préhilbertien, F sev de dim. finie, on peut considérer :
$p_F = p_{F,F^\perp}$ = projection orthogonale sur F
$s_F = s_{F,F^\perp} : x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F - x_{F^\perp}$ = symétrie orthogonale par rapport à F

$$\boxed{s_F = 2p_F - \mathrm{Id}}$$

Proposition 2.9. Soit E un espace euclidien et $(e_1, ..., e_p)$ un système orthonormé (SON).
On peut compléter $(e_1, ..., e_p)$ en une BON $(e_1, ..., e_n)$ de E

Théorème 2.10 (Orthonormalisation au sens de Gram-Schmidt).
Soit $N = [\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système libre de E, espace préhilbertien réel.
Alors il existe un unique système $(e_i)_{i\in N}$ tel que :

1. $(e_i)_{i\in N}$ est un système orthonormé.
2. $\forall k \in N$, $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_k)$
3. $\forall k \in N, \langle e_k, a_k\rangle > 0$

$(e_i)_{i\in N}$ est appelé orthonormalisé au sens de Gram-Schmidt des a_i

2.5 Distance à un sous-espace de dimension finie

Théorème 2.11 (Inégalité de Bessel). Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E
Soit $(e_1, ..., e_p)$ une BON de F, $p = \dim F$ est $x \in F$
Alors $d(x, F)$ est atteinte en un unique point, le projeté orthogonal de x sur F, $p_F(x)$
De plus

$$p_F(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + ... + \langle e_p, x\rangle e_p$$

$$d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x\rangle^2}$$

Et en particulier

$$\sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

2.6 Adaptation aux espaces préhilbertiens complexes

Définition 2.12. Un produit scalaire hermitien sur E un $\mathbb{C}$-ev est :

1. linéaire à droite : $\forall x,\ y \mapsto \langle x, y\rangle$ linéaire.
2. semi-linéaire à gauche : $\forall y,\ \langle x + \lambda x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle x', y\rangle$ et $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\forall x \neq 0,\ \langle x, x\rangle > 0$

Définition 2.13. $M \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $M^* = M$, ce qui signifie $\forall k, l :\ \overline{M_{k,l}} = M_{l,k}$

Proposition 2.14. On garde les résultats suivants :

1. Existence du BON dans E hermitien.
2. F sev de dim. finie de E préhilbertien complexe :
   - $F \oplus F^\perp = E$ et $F^{\perp\perp} = F$
   - $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$ si $(e_1, ..., e_n)$ BON de F
   - $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$
3. ON au sens de GS toujours valable.
4. $\langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2\langle x, x\rangle$

3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

3.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 3.1. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$
On dit que u est un isomorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle si u conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(ie. u conserve la norme)

$$\|u(x)\| = \|x\|$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E

Proposition 3.2. $O(E) \subset GL(E)$
C'est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal de E

Proposition 3.3.

$$\boxed{u \in O(E) \implies \mathrm{Sp}\, u \subset \{-1, 1\}}$$

De plus

$$\boxed{\ker(u - \mathrm{Id}) \perp \ker(u + \mathrm{Id})}$$

Proposition 3.4. Soit E euclidien, $u \in O(E)$
Si F est un sev stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u

Proposition 3.5. Soit E un espace euclidien, $(e_1, ..., e_n)$ une BON et $u \in \mathcal{L}(E)$
Alors

$$\boxed{u \in O(E) \iff (u(e_1), ..., u(e_n)) \text{ BON}}$$

3.2 Matrices orthogonales

Définition 3.6. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
ON dit que A est orthogonale si les colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.
On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$

Proposition 3.7. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{aligned} A \in O(n) &\iff A^T A = I_n \\ &\iff AA^T = I_n \\ &\iff \text{ les lignes de } A \text{ forment une BON de } \mathbb{R}^n \\ &\iff A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = A^T \end{aligned}}$$

$O(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n

Proposition 3.8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien, $\mathcal{B}$ une BON de E et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$
Alors

$$\boxed{u \in O(E) \iff A \in O(n)}$$

Proposition 3.9. Si $\mathcal{B}$ BON de E et $P = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ alors

$$\boxed{P \in O(n) \iff \mathcal{B}' \text{ BON}}$$

Proposition 3.10. Si $A \in O(n)$, $u_A \in O(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\boxed{\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} u_A \subset \{-1, 1\}}$$

et

$$\boxed{\ker(A - I_n) \perp \ker(A + I_n)}$$

3.3 Groupe spécial orthogonal

Proposition 3.11. Si E euclidien, $u \in O(E)$ alors $\det(u) = \pm 1$

Définition 3.12. Soit E euclidien et $n \in \mathbb{N}^*$
On note $SO(n) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ le groupe spécial orthogonal d'ordre n
$SO(E) = SL_n(E) \cap O(E)$ est le groupe orthogonal de E

Définition 3.13. Si $n \in SO(E)$ on dit que n est une rotation de E
Si $A \in SO(n)$ on dit que A est une matrice orthogonale positive.
Si $u \in O(E) \backslash SO(E)$, u est une "antirotation".

Définition 3.14. Soit E $\mathbb{R}$-ev de dim. finie.
Choisir une orientation de E c'est décréter une base $\mathcal{B}_0$ directe.
Si $\mathcal{B}$ est une autre base, $\mathcal{B}$ directe $\iff \det \operatorname{Mat}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}) > 0$

Définition 3.15. Soit E un espace euclidien orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormé directe, $n = \dim E$
On appelle produit mixte de $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ le déterminant $[x_1, ..., x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$
Il est indépendant de la base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

3.4 Groupe orthogonal d'un plan euclidien orienté

Définition 3.16. Si $\theta \in \mathbb{R}$ on va noter

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$

Théorème 3.17. Soit $f : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) \to (SO(2), \times) \\ \theta \mapsto R_\theta \end{cases}$
f est un morphisme surjectif de groupes de noyau $\ker f = 2\pi\mathbb{Z}$
En particulier $SO(2) \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Définition 3.18. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une BON directe de P et $\theta \in \mathbb{R}$
On rappelle rotation d'angle θ de P l'endomorphisme $r_\theta \in \mathcal{L}(P)$ tel que $\operatorname{Mat}_{(\vec{i},\vec{j})} r_\theta = R_\theta$
r_θ est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

Proposition 3.19. Soit P un plan euclidien orienté et $u \in SO(P)$
Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = r_\theta$
En particulier $SO(P)$ est un groupe abélien et $SO(P) \approx SO(2) \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Proposition 3.20. Soit P un plan euclidien, $u \in O(P) \backslash SO(P)$ ("antirotation").
Alors u est une réflexion ie. une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ : $u = s_\Delta$

Proposition 3.21.

$$\boxed{O(P) = \{ \text{ rotation d'angle } \theta \in \mathbb{R}, \text{ symétrie orthogonale } s_\Delta\}}$$

4 Réduction des matrices orthogonales

4.1 Cas général

Théorème 4.1. Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$
Si $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ alors il existe une base orthonormée de E telle que

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{R_{\theta_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_p}} & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_i \not\equiv 0[\pi]$$

Corollaire 4.2. Soit $A \in O(n)$
Il existe $P \in O(n)$ telle que

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} \boxed{R_{\theta_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_p}} & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta_i \not\equiv 0[\pi]$$

Proposition 4.3. Les réflexion engendrent $O(E)$

4.2 Rotation en dimension 3

Théorème 4.4. Soit $M \in SO(3)$
M est orthogonalement semblable à une matrice

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\exists P \in O(n) \quad P^{-1}MP = P^T MP = A_\theta}$$

Définition 4.5. Soit E un espace euclidien de dim. 3
Soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire, $\Delta = \mathbb{R}\vec{k}$, $p = \vec{k^{\perp}}$ orienté par $(\vec{i}, \vec{j})$ base de P avec $\vec{i}n\vec{j}, \vec{k}$ directe orthonormée.
La rotation d'axe Δ orienté par $\vec{k}$ et d'angle θ est l'endomorphisme $r_{\theta,\vec{k}}$ tel que

$$\operatorname*{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r_{\theta,\vec{k}}) = A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.6. Soit $u \in SO(E)$, E euclidien orienté de dimension 3.
Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{k}$ unitaire tel que

$$\boxed{u = r_{\theta,\vec{k}}}$$

5 Exercices classiques

5.1 Projecteur p tel que $|||p||| = 1$

Soit E un espace euclidien, p un projecteur. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$
Montrer que p est un projecteur orthogonal.

5.2 Décomposition QR

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$
Montrer que il existe un unique couple (Q, R) avec :

$$\begin{cases} A = QR \\ Q \in O(n) \\ R \text{ est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux} > 0 \end{cases}$$

5.3 Décomposition de Cholevski - Inégalité d'Hadamard

1. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
   Montrer qu'il existe une unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 tel que $A = B^T B$ (Cholevski)
2. Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors
   $0 \leqslant \det A \leqslant a_{11}a_{22}...a_{nn}$ (Hadamard)

5.4 Matrices de Gram - Inégalité d'Hadamard

Soit E un espace préhilbertien, $x_1, ..., x_n \in E$
La matrice de Gram de $x_1, ..., x_n$ est $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = G(x_1, ..., x_n) \in S_n(\mathbb{R})$

1. Monter que $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ et même $(x_1, ..., x_n)$ libre $\implies A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
   Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$, $(e_1, ..., e_r)$ une base orthonormée de F et $P = \operatorname*{Mat}_{(e_1,...,e_r)}(x_1, ..., x_n)$
2. Montrer que $A = G(x_1, ..., x_n) = P^T P$ et en déduire que $\text{rg}\, A = \text{rg}(x_1, ..., x_n)$
   On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ libre $(r = n)$ et $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}_0$ est l'ON au sens de Gram-Schmidt de $(x_1, ..., x_n)$
3. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}_0}(x_1, ..., x_n)| = \sqrt{\det G(x_1, ..., x_n)}$
4. Montrer que $\det(G(x_1, ..., x_n)) \leqslant \|x_1\|^2 ... \|x_n\|^2$ et préciser le cas d'égalité.
5. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ $M = (C_1 \mid ... \mid C_n)$
   Montrer que $|\det M| \leqslant \|C_1\| \times ... \times \|C_n\|$ (norme euclidienne canonique) et le cas d'égalité quand M est inversible.

6. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x,F)^2 = \frac{\det G(x_1,\dots,x_n,x)}{\det G(x_1,\dots,x_n)}$

5.5 Racines de polynômes orthogonaux

Soit $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$. Sur $\mathbb{R}[X]$ on pose $\langle P, Q \rangle = \int_a^b PQ\mu$

1. Monter qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ orthonormés telle que $\deg P_n = n$
   Que dire de la suite (Q_n) avec $\deg Q_n = n$ et les Q_n 2 à 2 $\perp$?
2. Monter que les P_n sont scindés à racines simples toutes dans $]a,b[$
3. Il existe $(a_n), (b_n), (c_n)$ trois suites réelles avec $\forall n \geqslant 0$: $XP_{n+1} = a_n P_{n+2} + b_n P_{n+1} + c_n P_n$