Chapitre 13. Équations différentielles linéaires ($1^{\text{ère}}$ partie)

1 Équations scalaires d'ordre 1

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I intervalle tel que $\overset{\circ}{I} \neq \varnothing$

1.1 Généralités

Définition 1.1. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 est une équation du type

$$(E) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

avec $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues, données et $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable, inconnue.
On dit que (E) est régulière si a ne s'annule pas : (E) peut être mis sous la forme

$$(E) \quad y' + \varphi(x)y = \psi(x)$$

1.2 Solutions des équation régulières

Théorème 1.2. Soit $\varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ continues et

$$\begin{aligned} (E) &\quad y' + \varphi y = \psi \\ (E_0) &\quad y' + \varphi y = 0 \end{aligned}$$

Soit $x_0 \in I$
Les solutions de $(E_0) \quad y' + \varphi y = 0$ sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt\right)}$$

où C est une constante arbitraire dans $\mathbb{K}$

Théorème 1.3 (Méthode de variation de la constante)**.**
Soit

$$(E) \quad y' + \varphi y = \psi$$

avec $\varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ continues.
Soit Y une solution non nulle de $(E_0) \quad y' + \varphi y = 0$
Les solutions non nulles de (E) sont les fonctions $x \mapsto \lambda(x)Y(x)$ avec $\lambda : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall x \in I$

$$\boxed{\lambda'(x)Y(x) = \psi(x)}$$

ie.

$$\boxed{\lambda' Y = \psi}$$

Théorème 1.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.**
Soit

$$(E) \quad y' + \varphi y = \psi$$

avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$
L'espace des solutions de (E) est une droite affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$
De plus, si on se donne $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution y de (E)
vérifiant $y(x_0) = y_0$ (Condition fe Cauchy)

1.3 Exemples d'équations non régulières

Pour les équations non régulières on procède par analyse-synthèse.

<u>Exercice</u> : Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$(E) \quad x^2y' + y = 1$$

2 Équations scalaires d'ordre 2

Définition 2.1. Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation du type

$$(E) \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

avec $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues, données et $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable 2 fois, inconnue.
On dit que (E) est régulière si a ne s'annule pas : (E) peut être mis sous la forme

$$(E) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = \theta(x)$$

2.1 Cas des équations régulières

Théorème 2.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit $\varphi, \psi, \theta : I \to \mathbb{K}$ continues, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$
Soit

$$(E) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = \theta(x)$$

avec $x \in I$
Alors il existe une uniques solution y de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ (conditions de Cauchy)

Corollaire 2.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit $\varphi, \psi, \theta : I \to \mathbb{K}$ continues.
Soit

$$\begin{aligned} (E) &\quad y'' + \varphi y' + \psi y = \theta \\ (E_0) &\quad y'' + \varphi y' + \psi y = 0 \end{aligned}$$

Alors les solutions de (E_0) constituent un sec de dimension 2 S_0 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$
Les solutions de l'équation complète constituent un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ dont la direction est S_0

2.2 Méthode de variations de la constante

Définition 2.4. Soit

$$(E_0) \quad y'' + \varphi y' + \psi y = 0$$

avec $\varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ continues.
Soit y, z deux solutions de (E_0)

1. Si (y, z) est libre, on dit que (y, z) est un couple de solutions indépendantes
   (c'est alors la base de S_0 ens. des solutions)
2. On définit le wronskien de (y, z) par

$$W_{(y,z)} : \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Théorème 2.5. Soit

$$(E_0) \quad y'' + \varphi y + \psi y = 0$$

avec $\varphi, \psi : I \to \mathbb{K}$ continues.
Soit y, z deux solutions de (E_0)
Si (y, z) sont indépendantes alors $\forall x \in I, W_{(y,z)}(x) \neq 0$
S'il existe $x_0 \in I$ avec $W_{(y,z)}(x_0) \neq 0$ alors (y, z) sont indépendantes (et le wronskien ne s'annule jamais).
En particulier un wronskien est identiquement nul ou il ne s'annule jamais.

Théorème 2.6 (Méthode de variations des constantes)**.** Soit $\varphi, \psi, \theta : I \to \mathbb{K}\ \mathcal{C}^0$ et

$$(E) \quad y'' + \varphi y' + \psi y = \theta$$
$$(E_0) \quad y'' + \varphi y + \psi y = 0$$

Soit (y, z) un système fondamental de solutions de (E_0)
Alors les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{\lambda y + \mu z}$$

avec $\lambda, \mu : I \to \mathbb{K}\ \mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\boxed{\begin{pmatrix} y & z \\ y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}}$$

2.3 Étude qualitative de solutions d'équation d'ordre 2

Lemme 2.7 (Lemme de Gromwall (HP))**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}_+$, $u, v : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continues
On suppose que $\forall x \geq a$

$$u(x) \leq C + \int_a^x u(t)v(t)\,dt$$

Alors

$$\boxed{u(x) \leq C \exp \int_a^x v(t)\,dt}$$

Exercice : Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+$ de

$$(E) \quad y'' + xy = 0$$

Montrer que y est bornée.

2.4 Exemples d'équations non régulières

Pour les équations non régulières on procède par analyse-synthèse.

Exercice : Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$(E) \quad (x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = 0$$

3 Exercices classiques

3.1 Caractère isolé des zéros d'un système d'équations d'ordre 2 - Entrelacement

Soit

$$(E) \quad y'' + q(x)y = 0$$

avec $q : I \to \mathbb{R}$ continue.

1. Que peut-on dire d'une solution y de E telle que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$?
   Soit y une solution non identiquement nulle.
2. Montrer que les zéros de y sont isolés ie. sur un voisinage de x_0 avec $y(x_0) = 0$ y ne s'annule qu'en x_0
   En déduire que sur un segment y ne possède qu'un nombre fini de zéros.
   Montrer qu'il y a une quantité au plus dénombrable de zéros.
3. On suppose que y possède deux zéros $\alpha < \beta$ dans I
   Soit z solution tel que (y, z) sont indépendantes. Montrer que z s'annule entre α et β

3.2 Exercice type : Le changement de variables

Pour une équation du second ordre on peut tenter un changement de variables pour se ramener à une équation à coefficients constantes.
Exemple :

$$(1 + x^2)y'' + xy' + k^2 y = 0$$

avec $k > 0$ (indication : faire un changement de variable $x = \sinh(t)$)