Chapitre 16. Intégrales à paramètre

I, J intervalles d'intérieur non vide, E un evn.

1 Le théorème de convergence dominée

1.1 Le théorème de convergence dominée

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone). Soit $g_n : I \to [0, +\infty]$ mesurables et $g_n : I \to [0, +\infty]$
On suppose que :

1. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq g_n \leq g_{n+1}$

Alors dans $[0, +\infty]$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I g_n = \int_I g \in [0, +\infty]$$

Corollaire 1.2. Soit $F_0 : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable et $F_n : I \to \mathbb{R}_+$ $(n \geq 1)$ mesurable.
On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq F_{n+1} \leq F_n$
2. (F_n) converge simplement vers 0

Alors

$$\int_I F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1.2 Énoncé du théorème de convergence dominée

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux $(n \in \mathbb{N})$
On suppose :

1. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I
2. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(t)$ (Hypothèse de domination)

Alors les f_n sont intégrables et f aussi et

$$\boxed{\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f}$$

On a même

$$\|f_n - f\|_1 = \int_I |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1.3 Premiers exemples d'application

Quelques exercices classiques :

1. Montrer que
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ continue.
Montrer que
$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ continue avec $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
Montrer que
$$I_n = \int_0^1 f(nx) dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

4. Soit $n \geq 1$ et
$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$
Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ avec α à exprimer avec une intégrale.
5. Montrer que
$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

1.4 Théorème de convergence dominée appliquée à l'interversion série / suite

Corollaire 1.4 (Théorème de convergence dominée). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que :

1. $\sum f_n$ converge simplement vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ $\mathcal{C}^0$ par morceaux.
2. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right| \leq \varphi$ (Domination)

Alors les f_n sont intégrables, $\sum f_n$ est intégrable et
$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$$

1.5 Le théorème d'intégration terme à terme

Théorème 1.5 (Théorème d'intégration terme à terme pour les fonctions positives).
Soit $f_n : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que $\sum f_n$ converge simplement et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux.
Alors dans $[0, +\infty]$ on a
$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$
En particulier
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ intégrable} \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n < +\infty$$
Dans ces conditions, dans $\mathbb{R}_+^*$
$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$
Théorème 1.6 (Théorème d'intégration terme à terme). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ intégrables ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que :

1. $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux.
2. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_I |f_n| < +\infty$

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable et
$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$$
De plus
$$\left|\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$$

2 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre

2.1 Convergence dominée avec un paramètre continue

Corollaire 2.1. Soit $f : (x,t) \in A \times I \mapsto f(x,t) \in \mathbb{K}$ avec $A \subset E$ (E evn) et a adhérent à A
Soit $g : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On suppose :

1. Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} g(t)$
2. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ par morceaux.
3. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ <u>intégrable</u> telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi$ (Domination)

Alors pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ (ie. $t \mapsto f(x,t)$) est intégrable, g aussi et

$$\boxed{\int_I f(x,t)\,dt \xrightarrow[x \to a]{} \int_I g(t)\,dt}$$

2.2 Continuité

Théorème 2.2. Soit $A \subset E$ (E evn) et $f : (x,t) \in A \times I \mapsto f(x,t) \in \mathbb{K}$
On suppose :

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux.
2. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue.
3. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi$ (Domination)

Alors

$$F : x \in A \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

est bien définie et continue en A

2.3 Dérivation sous le signe intégral

Théorème 2.3 (Formule de Leibniz)**.** Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$
On suppose :

1. À x fixé $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I
2. À t fixé $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur J
3. À x fixé $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
4. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in J$

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Proposition 2.4. Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$ et $k \in \mathbb{N}^*$

On suppose :

1. À t fixé $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur J
2. Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, à x fixé $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est intégrable sur I
3. À x fixé $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux.
4. Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $x \in J$

$$\boxed{F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\, dt}$$

Corollaire 2.5. Soit $f : \begin{cases} J \times I \to \mathbb{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{cases}$

On suppose :

1. À t fixé $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur J
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, à x fixé $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\varphi_k : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable avec $\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$ (Domination)

Alors

$$F : x \in J \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et $\forall k \geq 0$, $x \in J$

$$\boxed{F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\, dt}$$

2.4 La fonction Γ d'Euler (À savoir retrouver)

Définition 2.6. Pour $x > 0$ on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

C'est la fonction Gamma d'Euler.

Extension : Si $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors on peut définir $\Gamma(z)$ de la même façon.

Proposition 2.7.

- Pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
  En particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
- $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Proposition 2.8. La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et pour $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Γ est convexe et $\lim\limits_{0^+} \Gamma = \lim\limits_{+\infty} \Gamma = +\infty$

2.5 Fonctions à support compact

Définition 2.9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$
Le support de f est $S = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$
On sit que f est à support compact si S est compact ie. borné, autrement dit :

$$\exists R > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| > R \implies f(x) = 0$$

Définition 2.10. Une suite de fonctions régularisantes est une suite de fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $\mathcal{C}^\infty$ à support contenu dans $[-a_n, a_n]$ où :

- a_n est une suite de $\mathbb{R}_+^*$
- a_n décroît.
- a_n tend vers 0

et vérifiant $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$

2.6 Intégrales doubles sur un pavé

Théorème 2.11 (Théorème de Fubini). Soit $a \leq b$, $v \leq d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$
Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Cette valeur commune est appelée

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy$$

2.7 Fonctions intégrables sur $I \times J$

Proposition 2.12. Soit $f : I \times J \to \underline{\mathbb{R}_+}$
Sous reserve de régularité de fonction on a dans $[0, +\infty]$

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\, dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)\, dx \right) dy$$

On note la valeur commune

$$\iint\limits_{I\times J} f \in [0, +\infty]$$

Si $\iint\limits_{I\times J} f < +\infty$ on dit que f est intégrable.

3 Convergence en moyenne quadratique

3.1 La convergence en moyenne

Définition 3.1. Soit $f_n \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ $n \in \mathbb{N}$
On dit que f_n converge en moyenne vers f si

$$\|f_n - f\|_1 \to 0$$

On dit que f_n converge en moyenne quadratique vers f si

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int_I |f_n - f|^2} \to 0$$

On note $L^\infty(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I bornées.
Alors
$$\boxed{L^\infty \subset L^2(I) \subset L^1(I)}$$
Ces inclusions sont strictes si I n'est pas un segment.

3.2 Complément : Base hilbertienne

Théorème 3.2 (Inégalité de Bessel-Parseval). Soit E préhilbertien, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé et $x \in E$
Alors $\left(\langle e_n, x\rangle^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (ie. $(\langle e_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$) et
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Définition 3.3. Soit E préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé.
On dit que$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si $\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\operatorname{Vect}}(e_n)} = E$

Théorème 3.4 (Identité de Parseval). Soit E préhilbertien, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne et $x \in E$
On a pour $\|\|_E$
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle e_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n$$
$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle^2}$$

Définition 3.5. $\langle e_n, x\rangle$ est le coefficient de Fourrier de x selon e_n dans la base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$

3.3 Complément : séries de Fourrier

Proposition 3.6. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions continues 2π-périodiques) muni de $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} fg$

On note $\begin{cases} c_k : x \mapsto \cos kx \\ s_k : x \mapsto \sin kx \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}$
Alors
$$f = \langle 1, f\rangle 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\langle c_n, f\rangle c_n + 2\langle s_n, f\rangle s_n\right)$$

On pose
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 2\langle c_n, f\rangle \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 2\langle s_n, f\rangle$$

Alors
$$\boxed{f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f)c_n + b_n(f)s_n\right)}$$
Au sens de $\|\|_2$

Corollaire 3.7 (Parseval). Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Alors
$$\boxed{\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)}$$

Proposition 3.8. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (fonctions continues 2π-périodiques) muni de $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$

On note $e_n : x \mapsto e^{inx}$

On pose

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

Alors

$$\boxed{f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n}$$

$$f = \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$$

Corollaire 3.9 (Parseval). Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Alors

$$\boxed{\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2}$$

3.4 Complément : les intégrales à connaître

Proposition 3.10 (Intégrale de Gauss).

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Proposition 3.11 (Intégrale de Dirichlet).

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}}$$